

Teil 1: Rechenregeln aus der Mittelstufe in Physik (11.7.21)

Es gibt einige Dinge, die beim Rechnen in Physik immer wieder mal gebraucht werden. Manches davon geht oft schief, weil die Rechenregeln falsch angewendet werden oder weil Schüler sich nicht mehr daran erinnern.

Auf der ersten Seite stehen die Fälle, die in Physik gebraucht werden. Falls Sie nicht mehr wissen, woher Sie das aus der Mittelstufe kennen: Das steht auf der zweiten Seite. Das kann man auch im Matheunterricht gut brauchen ;-)

1. Bei Brüchen kann man die Komponenten auseinanderziehen und anders zusammenfügen.

$$a \cdot \frac{c}{ba} = \frac{ac}{ba} = \frac{c}{b}$$

oder

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{ac}{b} = \frac{ac}{ba} = \frac{c}{b}$$

oder

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{ac}{ba} = \frac{c}{b}$$

2. Kürzen bei Doppelbrüchen: Erst mit dem Kehbruch des Nenners multiplizieren, dann kürzen

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{a \cdot c}{b \cdot a} = \frac{c}{b}$$

3. Einen Bruch durch eine Zahl teilen

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

4. Das Produkt zweier Zahlen quadrieren

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

5. Einen Bruch quadrieren

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Allgemeine Termumformungen

Kommutativgesetz: Bei reinen Produkten oder Summen ist die Reihenfolge egal

$$x \cdot y \cdot z = z \cdot y \cdot x = x \cdot z \cdot y = \dots$$

$$x + y + z = z + y + x = x + z + y = \dots$$

Ausklammern:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Binomische Formeln:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Rechnen mit Brüchen und Zahlenbeispielen

Brüche multiplizieren:

- Auf einen Bruch schreiben.

$$\frac{\text{Zähler} \cdot \text{Zähler}}{\text{Nenner} \cdot \text{Nenner}}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$$

- Kürzen nicht vergessen!

Brüche addieren

- Auf den Hauptnenner bringen
- Zähler addieren und Nenner beibehalten

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}$$

Brüche dividieren:

Mit dem Kehrbuch des Nenners multiplizieren

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

Rechnen mit Wurzeln

Alle Rechenregeln gelten für $a, b, c > 0$

1. Produkte von Wurzeln

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

2. Quotienten von Wurzeln

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

3. Wurzeln und Quadrate

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = a$$

4. Teilweise Wurzelziehen

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}$$

5. Ausklammern und Ausmultiplizieren

$$a \cdot \sqrt{c} + b \cdot \sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$$

Teil 2: Hilfe zur Umformung von Gleichungen mit „vielen“ Variablen

Im Mathematikunterricht haben Sie gelernt, wie man Gleichungen mit einer Variablen umformt, um diese Variable auszurechnen. Meistens hieß sie x . In Physik müssen Sie häufig Gleichungen umformen, bevor Sie Zahlen einsetzen können. Das bedeutet, Sie haben mehrere Variablen. Das Vorgehen ist aber genauso. Sie kennen die Regeln für Äquivalenzumformungen.

Am Beispiel links können Sie erkennen, wie die Umformungen allgemein gemacht werden. Daneben steht eine Rechnung wie in Mathe für eine Gleichung mit x als einziger Variablen.

Sie können also vergleichen und sehen, dass die Vorgehensweise dieselbe ist.

Physikunterricht Gesucht ist t :	Matheunterricht: Gesucht ist x .
$s = vt + s_0 \quad -s_0$ $\Leftrightarrow s - s_0 = vt \quad :v$ $\Leftrightarrow \frac{s - s_0}{v} = t$	$3 = 4x + 1 \quad -1$ $\Leftrightarrow 2 = 4x \quad :4$ $\Leftrightarrow 0,5 = x$
Jetzt kann man s , s_0 und v messen und einsetzen.	

Was tun, wenn in den Gleichungen Brüche vorkommen?

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Was man tun muss, hängt davon ab, ob die gesuchte Größe im Zähler oder im Nenner steht.

Möglichkeit 1: a ist gesucht

a steht schon im Zähler. Um nach a aufzulösen, muss man nur b auf die andere Seite bringen.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad | \cdot b$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{c}{d} \cdot b$$

Möglichkeit 2: b ist gesucht

b steht im Nenner. Um nach b aufzulösen muss man es zunächst in den Zähler bringen.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad | \cdot b$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{c}{d} \cdot b \quad | \cdot \frac{d}{c}$$
$$\Leftrightarrow a \cdot \frac{d}{c} = b$$

Tipp beim Rechnen für Möglichkeit 2:

Wer möchte, kann auch auf beiden Seiten den Kehrruch nehmen.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad | \cdot a$$
$$b = a \cdot \frac{d}{c}$$

Teil 2b: Rechenregeln aus der Mittelstufe benutzen

Die folgenden Rechnungen werden oft verkehrt gemacht. Dann kommt man eventuell nicht weiter, weil Variablen nur wegfallen, wenn man alles richtig gemacht hat.

1. Vorsicht beim Kürzen von Doppelbrüchen! Das geht oft schief, In diesem Beispiel kann man nämlich nicht kürzen.

$$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{bc}{a^2}$$

2. Oft kann man Doppelbrüche vermeiden, wenn man bei der Umformung ein bisschen nachdenkt. Statt durch den Bruch zu teilen, kann man mit dem Kehrbuch multiplizieren.

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{c}x \quad | \cdot \frac{c}{a}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = x$$

3. Vorsicht, wenn ein Bruch quadriert wird. Man muss Zähler **und** Nenner quadrieren.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

4. Für $x > 0$ heben sich Wurzeln und Quadrate auf. Dabei muss man darauf achten, wo man Quadrate hat und wo nicht.

$$\sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$
$$\sqrt{4x^2} = 2x$$

5. Wenn Wurzeln in Doppelbrüchen vorkommen, wird so gerechnet wie in Teil 1a beschrieben (Mit dem Kehrbuch multiplizieren)

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{x}{y}}} = x \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$$

6. Wenn eine Variable in der Wurzel vorkommt, kann es Sinn machen, alles in die Wurzel zu ziehen.

$$x \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x^2y}{x}} = \sqrt{xy}$$

7. Manchmal kann man Wurzeln ganz vermeiden, indem man die Gleichung quadriert.

$$\sqrt{3x} = 3ay \quad |^2$$
$$3x = (3ay)^2$$
$$3x = 9a^2y^2$$

Teil 3: Was tun, wenn Summen vorkommen?

Manchmal hat man nicht nur Brüche in einer Gleichung stehen, sondern auch Summen. Dann passieren beim Rechnen oft typische Fehler.

Vorgehensweise:

- Zuerst alle Terme mit der gesuchten Variablen auf eine Seite bringen.
- Dann alle Terme ohne die gesuchte Variable auf die andere Seite bringen.
- Schauen, ob man Terme zusammenfassen kann
- Erst danach teilen.

Physikunterricht. Gesucht ist v	Matheunterricht. Gesucht ist x
$2vx - ay = vx + bz \quad -vx$ $\Leftrightarrow 2vx - vx - ay = bz$ $\Leftrightarrow vx - ay = bz \quad +ay$ $\Leftrightarrow vx = bz + ay \quad :x$ $\Leftrightarrow v = \frac{bz+ay}{x}$	$4x - 3 = 2x + 7 \quad -2x$ $\Leftrightarrow 4x - 3 - 2x = 7$ $\Leftrightarrow 2x - 3 = 7 \quad +3$ $\Leftrightarrow 2x = 10 \quad :2$ $\Leftrightarrow x = 5$
<p>Manchmal muss man ausklammern, um nach einer Größe auflösen zu können:</p> $av + 2bv = 5s \quad v \text{ ausklammern}$ $(a + 2b) \cdot v = 5s \quad :(a+2b)$ $v = \frac{5s}{a + 2b}$	

<p>Unklug: Durch etwas teilen oder damit malnehmen, solange die bekannten und unbekannt Variablen nicht sortiert sind. Dann entstehen Brüche, mit denen Sie vielleicht nicht umgehen können.</p> <p>Warum? Alle Summanden müssen in dem Beispiel durch x geteilt werden. Bei den Termen, wo vorher kein x stand, bleibt dann $\frac{1}{x}$ stehen.</p>	$2vx - ay = vx + bz \quad :x$ $(2vx - ay) : x = (vx + bz) : x$ $2vx \frac{1}{x} - ay \frac{1}{x} = vx \frac{1}{x} + bz \frac{1}{x}$ $\Leftrightarrow 2v - \frac{ay}{x} = v + \frac{bz}{x}$
---	--

<p><u>Ausnahme 1:</u> Brüche beseitigen, die schon da stehen.</p> <p>Vorsicht! Wenn Sie auf beiden Seiten mit etwas multiplizieren oder dadurch teilen, müssen Sie das in allen Termen tun. Bei Brüchen nur mit Zahlen funktioniert das genauso wie oben mit dem x.</p>	$vx - \frac{1}{2}ay = \frac{1}{2}vx + bz \quad \cdot 2$ $2 \cdot vx - 2 \cdot \frac{1}{2}ay = 2 \cdot \frac{1}{2}vx + 2 \cdot bz$ $\Leftrightarrow 2vx - ay = vx + 2bz$
<p><u>Ausnahme 2:</u> Variablen können wegfallen.</p> <p>Vorsicht! Auch wenn die Variable alleine steht, fällt sie nicht einfach weg.</p>	$2mv - ma = mv + m \quad :m$ $2v - a = v + 1$

Teil 4: Hilfe zur Lösung von mehreren Gleichungen

In Mathe haben Sie drei Verfahren gelernt, um Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu lösen. In Physik braucht man in der Regel nur zwei davon:

1. Gleichsetzungsverfahren

Physik	Mathe
Gesucht ist a. F ist nicht bekannt.	Gesucht ist x. y ist nicht bekannt.
$F = ma$ $F = mgh$	$y = 2x$ $y = 4$
$ma = mgh \quad :m$ $a = \frac{mgh}{m} \quad \text{kürzen}$	$2x = 4 \quad :2$ $x = 2$
$a = gh$	
Jetzt kann man g und h messen und einsetzen.	
Die Rechnung funktioniert so auch, wenn man m gar nicht kennt. Wer diese Rechenmethode nicht verstanden hat, wird ohne m nicht weiter kommen. Lehrer geben m dann nämlich auch nicht an!	

2. Einsetzungsverfahren

Physik	Mathe
gesucht ist s. t ist nicht bekannt.	Gesucht ist x. y ist nicht bekannt.
$s = 0,5 a t^2$ $v = at \quad :a$	$x = 2y$ $6 = 3y \quad :3$
$t = \frac{v}{a} \quad \text{einsetzen}$	$y = 2$
$s = 0,5 a \left(\frac{v}{a}\right)^2 \quad \text{quadrat auflösen}$	$x = 2 \cdot 2$
$s = 0,5 a \frac{v^2}{a^2}$	$x = 4$
$s = \frac{0,5 a v^2}{a^2}$	
$s = \frac{0,5 v^2}{a}$	
Jetzt kann man a und v messen und einsetzen.	

Teil 5: Aufgaben zum Üben:

Zu Teil 1 und 2:

Vereinfachen Sie so weit wie möglich:	Lösen Sie die Gleichungen nach der unbekanntem Größe auf und berechnen Sie diese. Die angegebenen Zahlen dürfen erst am Ende eingesetzt werden.		
a) $\frac{s}{F^3} : s$	b) $\sqrt{a} \frac{\sqrt{a}}{3}$	a) $s = \frac{1}{2s} F^2 t$	s=5 ; t=3 ; gesucht: F
c) $s \frac{3t^2}{s^2} : t$	d) $a \frac{t^2}{a} \cdot \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{a} t}$	b) $mv^2 = sma$	s=2 ; v=5 ; gesucht: a
e) $\frac{1}{5} \frac{5a^3}{taF^2}$	f) $\frac{\sqrt{F}}{a^3} \cdot \frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{F^3}} : a$	c) $\frac{ma}{F} = 5aF$	m=1 ; gesucht: F
g) $\frac{v}{t} \frac{ta^2}{\sqrt{a^2 s F^3}} F$	h) $\frac{\frac{F}{a^2}}{\frac{va}{\sqrt{F^2}}}$	d) $\frac{ma}{B} = \frac{a}{c}$	B=1 ; m =5 ; gesucht: c
i) $\frac{\sqrt{F^2 s^3}}{Fs}$	k) $\frac{F\sqrt{3a}}{\sqrt{\frac{aF^2}{s}}}$		

Zu Teil 3:

Lösen Sie folgende Gleichungen. Lösen Sie dabei zuerst nach der gesuchten Größe auf. Zahlen dürfen erst am Ende eingesetzt werden.	
a) $2ma + mv^2 = mgh + 2mv^2$	v=5 , a=7 , g=9 ; gesucht h
b) $\frac{mx}{v} + b = \frac{s}{v} + \frac{2mx}{v}$	m=1 , b=1 , v=5 , x=4 ; gesucht: s
c) $vx + v^2s = 2vx$	x=7 , s=1 ; gesucht: v
d) $mx + \frac{1}{2}mvx + mv = 2ms$	v=2 , s=3 ; gesucht: x

Zu Teil 4:

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme. Lösen Sie dabei zuerst nach der gesuchten Größe auf. Zahlen dürfen erst am Ende eingesetzt werden.			
a) $s = vtF$ $s=ct$	c=6 ; F=3 gesucht: v	b) $d = \frac{sa}{F}$	d=1 ; s=5 ; a=7
		$a = \frac{F}{m}$	gesucht: m
		c) $B = n^2Fl$	B=4
		$l = \frac{F}{n^2}$	gesucht: F

Lösungen zu den Aufgaben:

Zu Teil 1 und 2:

Vereinfachen Sie so weit wie möglich:	Lösen Sie die Gleichungen nach der unbekanntem Größe auf und berechnen Sie diese. Die angegebenen Zahlen dürfen erst am Ende eingesetzt werden	
a) $\frac{1}{F^3}$	b) $\frac{a}{3}$	a) $F = s \sqrt{\frac{2}{t}} = 4,08$
c) $\frac{3t}{s}$	d) $t \sqrt{\frac{s}{a}}$	b) $a = \frac{v^2}{s} = 12,5$
e) $\frac{a^2}{tF^2}$	f) $\frac{1}{Fa^2}$	c) $F = \sqrt{\frac{m}{5}} \approx 0,45$
g) $\frac{va}{sF^2}$	h) $\frac{F^2}{va^3}$	d) $c = \frac{B}{m} = 0,2$
i) \sqrt{s}	k) $\sqrt{3s}$	

Zu Teil 3:

Lösen Sie folgende Gleichungen:
a) $h = \frac{2a-v^2}{g} = -1,22$
b) $s = -mx + bv = 1$
c) $v = \frac{x}{s} = 7$
d) $x = \frac{4s-2v}{2+v} = 2$

Zu Teil 4:

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:	Hinweis: Wenn man bei c) einfach die untere Gleichung nach n^2 auflöst und das dann in die obere Gleichung einsetzt, dann ist man ganz schnell am Ziel und spart sich die Wurzeln fast komplett. Probieren Sie es mal, wenn Sie nicht selbst drauf gekommen sind.
a) $v = \frac{c}{F} = 2$	
b) $m = \frac{s}{d} = 5$	
c) $F = \sqrt{B} = 2$	

Teil 6: Konkrete physikalische Beispiele zum Herleiten von Formeln

Grundlegende Hinweise:

Im Laufe der Oberstufe müssen Sie lernen, Formeln herzuleiten, ohne gleich Zahlen einzusetzen. Je früher Sie das üben, desto besser. Auch dann, wenn es am Anfang einfacher erscheint, gleich alle Zahlen einzusetzen.

In Physik müssen Sie immer mit Einheiten rechnen. Einheiten werden auch in jedem Schritt in der Rechnung mitgeführt.

Um am Ende die richtige Einheit heraus zu bekommen, gibt es einen Trick: Wenn Sie Grundeinheiten in Ihre Formeln einsetzen, werden Sie als Ergebnis auch Grundeinheiten heraus bekommen.

Die Grundeinheiten finden Sie im Tafelwerk in der Tabelle „Größen und Einheiten der Mechanik“. In der Tabelle im Tafelwerk steht unter anderem

Größe	Formelzeichen	Einheit
Beschleunigung	a	$\frac{m}{s^2}$
Länge	l	m
Masse	m	kg
Kraft	F	N
Zeit	t	s

Tipp zum Umrechnen von Einheiten:

$$1 \frac{km}{h} = 1 \frac{1000m}{3600s} = \frac{1}{3,6} \frac{m}{s}$$

Teilen durch 3,6

$$1 \frac{m}{s} = 1 \cdot 3,6 \frac{km}{h}$$

Mit 3,6 malnehmen

Beispiel 1: In der Gleichung sind alle Größen bis auf eine bekannt.

Berechnen Sie die Zeit, die sie bei der Beschleunigung aus dem Stand für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung über die Strecke $s=1km$ mit der Beschleunigung $a=3\frac{m}{s^2}$ brauchen.

Schritt 1: Gegeben/Gesucht Rechnen Sie alle Einheiten in Grundeinheiten um.	geg: $s = 1km = 1000m$ $a = 3\frac{m}{s^2}$ ges: t
Schritt 2: Formel	$s = \frac{1}{2}at^2$
Schritt 3: Umformen nach der gesuchten Größe (Endergebnis - Zwischenschritte wurden hier weg gelassen)	$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$
Schritt 4: Werte Einsetzen	$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000m}{3\frac{m}{s^2}}} = 25,8s$

Leider sind die Lösungen nicht immer so einfach wie im ersten Beispiel. Es kann sein, dass in der Formel mehr als eine Größe unbekannt ist. Dann muss man einen Weg finden, die unbekannt GröÙen zu berechnen.

Auch hier wird es nötig sein, erst eine Formel herzuleiten, in die am Ende nur noch Zahlen eingesetzt werden. Wie das geht zeigen die beiden folgenden Beispiele.

Beispiel 2 ist das Einfachere: Hier kann man sofort eine Formel finden, um die unbekannte Größe auszurechnen.

Beispiel 3 ist komplizierter: Hier taucht mit der gefundenen Formel eine weitere Unbekannte auf, die man erst bestimmen muss.

Beispiel 2: In der Gleichung sind 2 Größen unbekannt.

Berechnen Sie die Zeit, die sie bei der Beschleunigung aus dem Stand für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung über die Strecke $s=1\text{km}$ brauchen. Der Gegenstand hat eine Masse von 200g und es wirkt eine Kraft von $0,6\text{N}$

Schritt 1: Gegeben/Gesucht Rechnen Sie alle Einheiten in Grundeinheiten um.	geg: $s = 1\text{km} = 1000\text{m}$ $F = 0,6\text{N}$ $m = 200\text{g} = 0,2\text{kg}$ ges: t
Schritt 2: Formel	$s = \frac{1}{2}at^2$
Schritt 3: In der Formel aus Schritt 1 ist a nicht bekannt. Stattdessen ist die Kraft F angegeben. Suchen Sie also nach einer Formel, in der F und a stehen. Mit ihrer Hilfe kann man a aus der Gleichung eliminieren.	$F=ma$
Schritt 4: Lösen Sie die gefundene Beziehung nach a auf und setzen Sie in die erste Gleichung ein. Dann ist a eliminiert und in der Gleichung stehen nur noch bekannte Größen.	$a = \frac{F}{m} \quad ; \quad s = \frac{1}{2}at^2$ $s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$
Schritt 5: Umformen nach der gesuchten Größe. Am Ende sollen keine Doppelbrüche in der Gleichung stehen!	$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot m}{F}}$
Schritt 5: Werte Einsetzen	$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000\text{m} \cdot 0,2\text{kg}}{0,6\text{N}}} = 25,8\text{s}$

Beispiel 3: In der Gleichung sind 2 Größen unbekannt.

Berechnen Sie die Zeit, die sie bei der Beschleunigung aus dem Stand für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung über die Strecke $s=1\text{km}$ brauchen. Es wirkt eine Kraft von $F=0,6\text{N}$. Die Gewichtskraft des Gegenstandes beträgt $F_G=2\text{N}$. (Rechnen Sie mit $g=10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

<u>Die Schritte 1 bis 4 laufen so ab wie in Beispiel 2.</u>	
Ende Schritt 4: Diesmal ist m unbekannt. Die Masse muss also aus der Gleichung eliminiert werden.	$s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$
Schritt 5: Gegeben ist F_G . Suchen Sie nach einer Formel, in der m und F_G stehen.	$F_G = mg$
Schritt 6: Lösen Sie die gefundene Gleichung nach m auf und setzen Sie in die Gleichung aus Schritt 4 ein. Vorsicht! Hier hat man zwei verschiedene Kräfte: F_G und F .	$m = \frac{F_G}{g}$ $s = \frac{1}{2} \frac{F \cdot g}{F_G} t^2$
Schritt 7: Umformen nach der gesuchten Größe	$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot F_G}{g \cdot F}}$
Schritt 8: Werte einsetzen	$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000\text{m} \cdot 2\text{N}}{10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,6\text{N}}} = 25,8\text{s}$